Leçon 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Références : Grifone, Rombaldi, Gourdon

Notations

I - Définitions et premières propriétés

1) Endomorphismes et matrice diagonalisables
2) Éléments propres
3) Polynômes annulateurs
4) Polynôme caractéristique

II - Critères

1) Critères de diagonalisabilité
2) Critères de co-diagonalisabilité

III - Endomorphismes remarquables diagonalisables

1) Endomorphismes symétriques
2) Endomorphismes normaux
3) Endomorphismes orthogonaux
4) Endomorphismes semi-simples

IV - Applications

1) Décomposition de Dunford
2) Calcul de puissances d'une matrice
3) Calcul d'exponentielles de matrices

DEV 1 : Décomposition de Dunford

DEV 2 : Réduction des endomorphismes normaux

152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Notations : K est un corps commutatif.
E est un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$
$u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E
F est un sous-espace vectoriel de E.

I - Définitions et premières propriétés

1) Endomorphismes et matrices diagonalisables [GRI]

DEF 1 : On dit que u est diagonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

EX 2 : Les homothéties de rapport $k \neq 0_K$ sont diagonalisables.

DEF 3 : Si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on dit que M est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale D i.e $\exists P \in GL_n(K)$ telle que $M = PDP^{-1}$.

RMQ 4 : La plupart des résultats qui suivent énoncés sur u sont valables pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ en voyant M comme la matrice d'un endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$.

2) Éléments propres [GOU]

DEF 5 : Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est valeur propre de u, lorsqu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le vecteur x est alors appelé vecteur propre de u associé à λ. On appelle spectre de u et on note $Sp_K(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u (dans K).

DEF 6 : Soit $\lambda \in Sp(u)$. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda Id_E)$ est un sev de E stable par u appelé sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

THM 7 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de f, deux à deux distinctes. Alors $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

EX 8 : Si $E = F \oplus G$, la projection p sur F parallèlement à G admet 0 et 1 comme valeur propre. [GRI]

3) Polynômes annulateurs [GOU] [FRAT]

DEF 9 : On considère le morphisme d'algèbres
$$\varphi : K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \longmapsto P(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$$
On note $\mathrm{Im}(\varphi) = K[u]$ et $\ker(\varphi)$ est un idéal noté $\mathrm{Ann}(u)$ appelé idéal annulateur de u. Il est engendré par un unique polynôme unitaire π_u appelé polynôme minimal de u.

PROP 10 : Pour tout $Q \in \mathrm{Ann}(u)$, les valeurs propres de u sont des racines de Q.

EX 11 : Si p est un projecteur, p est annulé par le polynôme $X(X-1)$ et on a $\pi_p = X(X-1)$.

THM 12 : (Lemme des noyaux) Soit $P = P_1 \dots P_k \in K[X]$ avec $\forall i \neq j$, $P_i \wedge P_j = 1$. Alors :
$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(u))$$ [GOU]

4) Polynôme caractéristique

DEF 13 : On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme de $K[X]$ défini par $\chi_u(X) = \det(X Id_E - u)$.
De même, pour $M \in \mathcal{M}_n(K)$, $\chi_M(X) = \det(X I_n - M)$.

PROP 14 : $\lambda \in Sp(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$

PROP 15 : Si F est stable par u, $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_{|F}} \mid \pi_u$

EX 16 : Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on note $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ sa matrice compagnon, alors $\pi_{C_P} = \chi_{C_P} = P$.

THM 17 : (Cayley-Hamilton) : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Autrement dit $\pi_u \mid \chi_u$.

DEF 18 : Soit $\lambda \in Sp(u)$. On appelle multiplicité algébrique de λ et on note m_λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u.

PROP 19 : On a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda \leq n$.

II - Critères

1) Critère de diagonalisabilité [GRI]

THM 20 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes de u. LASSE
(1) u est diagonalisable
(2) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u
(3) $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$
(4) $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i})$
(5) χ_u est scindé sur K et $\dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}$ $\forall i \in [\![1, p]\!]$
(6) Il existe $P \in \mathrm{Ann}(u)$ scindé à racines simples
(7) π_u est scindé à racines simples sur K et $\pi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$

COR 21 : Si χ_u est scindé à racines simples dans K, alors u est diagonalisable.

COR 22 : Si F est stable par u et u est diagonalisable, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

EX 23 : Comme dans EX 16, C_P est diagonalisable $\iff$ P est scindé à racines simples [FRAT]

2) Critères de co-diagonalisabilité [GOU]

DEF 24 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u et v sont co-diagonalisables lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres communs à u et v (i-e $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v)$ sont toutes deux diagonales).

PROP 25 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors
(i) Tout sous-espace propre de u est stable par v (en particulier $Ker(u)$)
(ii) $Im(u)$ est stable par v.

THM 26 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors u et v sont co-diagonalisables si et seulement s'ils sont diagonalisables et $u \circ v = v \circ u$.

III - Endomorphismes remarquables diagonalisables

Dans les trois sous-parties qui suivent, on prend $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien sur $\mathbb{R}$, de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ [ROM]

1) Endomorphismes symétriques Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

DEF 27 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) lorsque $u^* = u$ i-e :
$\forall (x, y) \in E \times E, \ \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$.
On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes symétriques de E. $\mathcal{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

THM 28 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice M dans une base orthonormée de E est symétrique i-e ${}^tM = M$.

LEMME 29 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle M sont toutes réelles.

LEMME 30 : On suppose $n \geq 2$. Si λ, μ sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{S}(E)$, alors E_λ et E_μ sont orthogonaux.

LEMME 31 : Si F est stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

THM 32 : Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée. Autrement dit, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, ou encore il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de u.

2) Endomorphismes normaux $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ [GOU]

DEF 33 On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si $M^*M = MM^*$.

LEMME 34 : Si F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

DEV 1

LEMME 35 On suppose $n = 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormée de E, la matrice de u a la forme $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

THM 36 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base orthogonale $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ a la forme de l'Annexe 1.

3) Endomorphismes orthogonaux $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ [GOU]

DEF 37 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E \times E, \ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale lorsque ${}^tMM = M{}^tM = I_n$.
On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

PROP 38 : $u \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow u^* = u^{-1}$ et donc u est normal

PROP 39 : Si $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(u)$, alors $|\lambda| = 1$.

THM 40 : Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a la forme donnée en Annexe 2.

4) Endomorphismes semi-simples [GOU]

DEF 41 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est semi-simple lorsque pour tout sev F de E stable par u, il existe un supplémentaire S de F stable par u.

PROP 42 : Si π_u est irréductible, u est semi-simple.

PROP 43 : u est semi-simple ssi π_u est produit de polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux.

PROP 44 : On suppose M semi-simple. Alors M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec D diagonale et B constituée de blocs de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ centrés sur sa diagonale principale.

DEV 3

IV - Applications

1) Décomposition de Dunford [GOU] DEV 2

LEMME 45 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. On pose $P = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ de P. Pour tout $i \in [\![1;s]\!]$, on note $N_i = \ker(M_i^{\alpha_i}(u))$. On a alors $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

THM 46 (Décomposition de Dunford) : On suppose χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes tel que :
(1) d est diagonalisable, n est nilpotente
(2) $f = d+n$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

2) Calcul de puissances de matrices [GRI]

PROP 47 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si M est diagonalisable, il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PDP^{-1}$ et alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$ avec $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_k^k)$.

EX 48 : Calculer une puissance de matrices est utile pour déterminer explicitement l'expression de suites récurrentes linéaires, par exemple pour calculer explicitement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$(*) \begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 4y_n \end{cases} \quad \text{telles que} \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(*) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3) Calcul d'exponentielles de matrices [GRI] [ROU] [GOU]

Dans cette partie, on note $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_E$ sur E : $|||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

PROP 49 : La série $\sum \frac{u^k}{k!}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ et on note $\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$

PROP 50 : Si $u \circ v = v \circ u$, alors $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$

COR 51 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. On a $u = d+n$ sa décomposition de Dunford. Alors : $\exp(u) = \exp(d)\exp(n) = \exp(d) + \exp(d)(\exp(n) - Id_E)$

COR 52 : u est diagonalisable si et seulement si $\exp(u)$ est diagonalisable.

EX 53 : Savoir calculer des exponentielles de matrices est utile pour résoudre des systèmes différentiels linéaires du type : [GRI]

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

en l'écrivant sous la forme $\frac{dX}{dt} = AX$ où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Les solutions sont données par $X(t) = \exp(tA)X_0$ où $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

ANNEXE 1 :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ (0) & & & & \ddots \; \tau_p \end{pmatrix} \quad \forall j \in [\![1;r]\!], \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in [\![1;p]\!], \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

ANNEXE 2 :
$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & R(\theta_r) & & \\ & & & \varepsilon_1 & \\ (0) & & & & \ddots \; \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad \forall j \in [\![1;p]\!], \varepsilon_j \in \{-1;1\}, \quad \forall i \in [\![1;r]\!], R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$